Lezione 2

Spazi di matrici

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ di dim n $\quad V \cong \mathbb{R}^n$ è una n-varietà liscia

Esempi: $M(m,n,\mathbb{R}) = \{$matrici $m \times n$ reali$\}$

$M(n) = M(n,n,\mathbb{R}) \qquad S(n) = \{$matrici simm.$\}$

$A(n) = \{$ " " antisimm.$\}$

$\overset{n^2}{GL(n,\mathbb{R})} \subseteq \overset{n^2}{M(n)}$ matrici invertibili

aperto in varietà $\Rightarrow$ varietà

$I \in \overset{n^2-1}{SL(n,\mathbb{R})} = \{A \mid \det A = 1\} \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottovarietà

$\det : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

1 è valore regolare $\Rightarrow \det^{-1}(1) = SL(n,\mathbb{R})$ sottovarietà

$T_I SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$

$$O(n) = \{ A \in M(n) \mid {}^tA \cdot A = I \} \subseteq GL(n,\mathbb{R}) \text{ sottovarietà}$$

$$GL(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{F} S(n)$$
$$A \longmapsto {}^tA \cdot A$$

I è valore regolare $\Rightarrow$ $F^{-1}(I) = O(n)$ sottovarietà

$$T_I\, O(n) = A(n)$$

Gruppi di Lie

<u>Def</u>: Un GRUPPO DI LIE è varietà G che è anche gruppo t.c.

$$\times : \underline{G \times G} \longrightarrow \underline{G} \quad \text{è liscia}$$
$$\text{inversa}: G \longrightarrow G \quad \text{è liscia}$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

<u>Es</u>: spazi vettoriali con $+$, $GL(n,\mathbb{R})$ con $\times$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ con $\times$

<u>Prop</u>: $M_k(m,n) = \{ A \in M(m,n,\mathbb{R}) \mid rk A = k \}$ $k \leq m,n$ formano una sottovarietà di codim. $(m-k)(n-k)$

dim $\quad P_0 \in M_k(m,n)$ ha minore $k\times k$ invertibile

Posso supporre che sia $P_0 = \begin{array}{c} \\ k\{ \end{array}\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_0}^{k} & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array}\right)$ $\quad \det A_0 \neq 0$

Se P è abbastanza vicina a P_0
$P \in M_k(m,n)$ $\leadsto$ $P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ $\quad \det A \neq 0$

$$Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \qquad PQ = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{array}\right)$$

invertibile $\Rightarrow \operatorname{rk} PQ = \operatorname{rk} P$

$\operatorname{rk} P = k \Leftrightarrow \operatorname{rk} PQ = k \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$

Quindi vicino a P_0 $\quad M_k(m,n)$ è varietà di codim $= (m-k)(n-k)$

$\square$

Omotopia e isotopia liscia

Def: $f, g : M \to N$ funzioni lisce. Una OMOTOPIA LISCIA è $F : M \times \mathbb{R} \to N$ liscia t.c. $F_t(x) = F(x,t)$

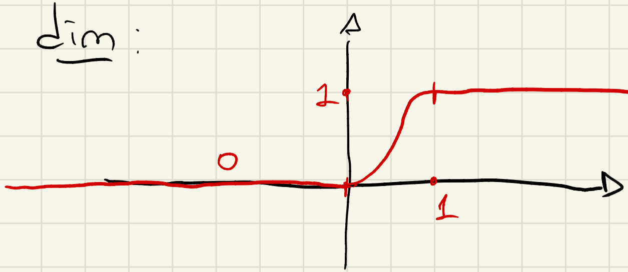
$F_0 = f \quad , \quad F_1 = g.$

Def: $f, g : M \to N$ sono OMOTOPE se $\exists\, F$ liscia fra loro

Lemma: Se F omotopia fra f e g, $\exists\, F'$ omotopia fra f e g t.c. $F'(x,t) = f(x) \quad \forall\, t \leq 0$

$F'(x,t) = g(x) \quad \forall\, t \geq 1$

dim:



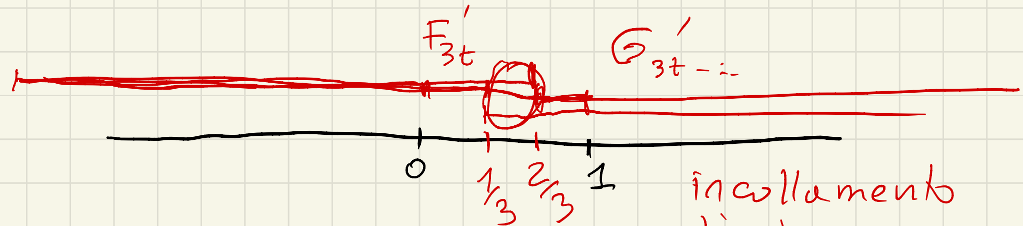
$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F'(x,t) = F(x, \psi(t))$

Prop: Essere omotopi è relazione di equivalenza

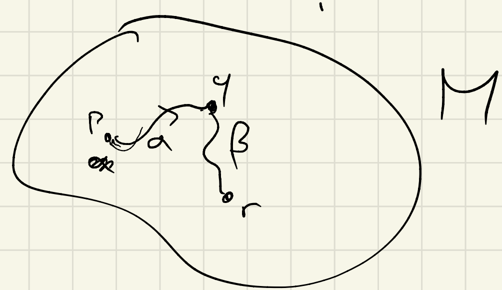
dim $f \sim g \sim h$

$$\begin{array}{cc} F & G \\ \downarrow & \downarrow \\ F' & G' \end{array}$$



incollamento liscio

Altra applicazione:



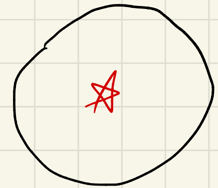
$\alpha : \underset{[0,1]}{\overset{}{I}} \to M \qquad \alpha'(t) = \alpha(\psi(t))$, $\quad I = [0,1]$

$\beta : J \to M \qquad \beta'(t) = \beta(\psi(t))$, $\quad J = [0,1]$

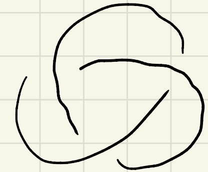
Def: Una ISOTOPIA fra $f, g : M \hookrightarrow N$ embedding è omotopia liscia F tra f e g t.c. $F_t : M \hookrightarrow N$ embedding $\forall t \in \mathbb{R}$

Essere isotopi è relazione di equivalenza

$f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$



nodi



sono omotope ma non sono isotope

non si scioglie

$g, f: M \to \mathbb{R}^n$ sono sempre omotope (liscia)

$f \sim \text{cost}$

$F_t(p) = t \cdot f(p) \qquad F_1 = f \qquad F_0 \text{ cost}$

SOTTOINSIEMI DI MISURA NULLA

<u>Ex</u>: $S \subseteq M$ boreliano $\Leftrightarrow$ lo è in carte

$\varphi: U \to V \qquad \varphi(U \cap S) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$

M varietà

In M non c'è nessuna misura.

<u>Def</u>: $S \subseteq M$ boreliano ha MISURA NULLA se $\varphi(U \cap S) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura nulla $\forall \varphi: U \to V$ carte

<u>Lemma di Sard</u>: $f: M \to N$. I VALORI CRITICI (= NON REG) hanno misura nulla in N

Cor: $f: M^m \to N^n$ $m < n$ $f(M) \subseteq N$ ha misura nulla

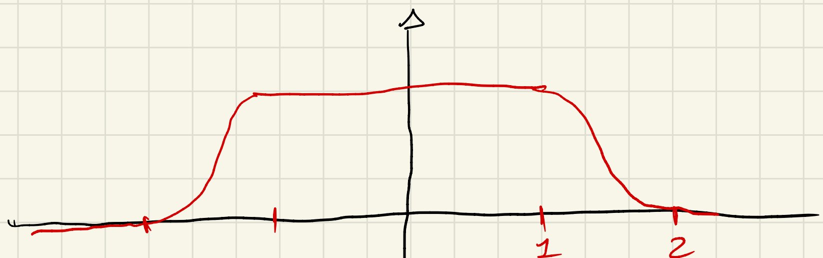
Teoremi di Whitney

Thm (Whitney per M cpt) M cpt $\Rightarrow \exists f: M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

dim: $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m\}$ adeguato loc. fin. $\Rightarrow$ finito $i = 1, \dots, k$

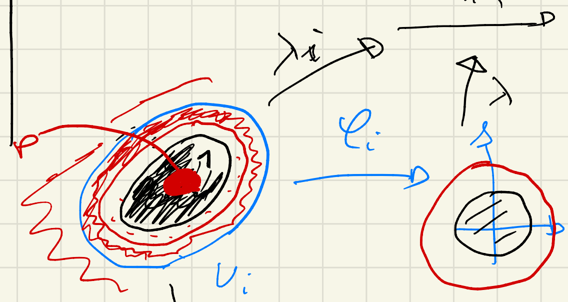
$\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 2 \end{cases}$$



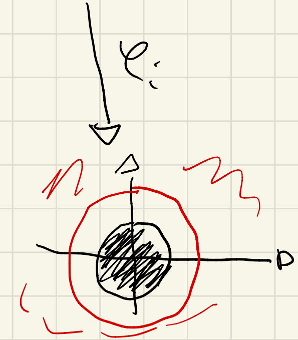
$\lambda_i : M \to \mathbb{R}$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \circ \varphi_i & \text{su } U_i \\ 0 & \text{su } M \setminus U_i \end{cases}$$



$$\psi_i : M \to \mathbb{R}^m$$

$$\psi_i = \begin{cases} \lambda_i \cdot \varphi_i & \text{su } U_i \\ 0 & \text{su } M \setminus U_i \end{cases}$$



$$F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

$$p \longmapsto \Big(\underbrace{\psi_1(p)}_{\mathbb{R}^m}, \dots \psi_i(p), \underbrace{\psi_k(p)}_{\mathbb{R}^m}, \underbrace{\lambda_1(p)}_{\mathbb{R}}, \overset{\overset{1}{\|}}{\lambda_i(p)} \dots, \underbrace{\lambda_k(p)}_{\mathbb{R}}\Big)$$

- F immersione $p \in M$ $\exists i$ t.c. $p \in \varphi_i^{-1}(B^n)$

  In $\varphi_i^{-1}(B^n)$ $\lambda_i \equiv 1$ $\psi_i \equiv \varphi_i$

  rk $d\varphi_i(p) = m$

- F iniettiva per assurdo $p \neq q$ e $F(p) = F(q)$ $p \in \varphi_i^{-1}(B^n)$

  $\lambda_i(p) = 1 \Rightarrow \lambda_i(q) = 1$

  $\varphi_i(p) \neq \varphi_i(q)$

- F imm. iniett $\Rightarrow$ embedd.

$\square$

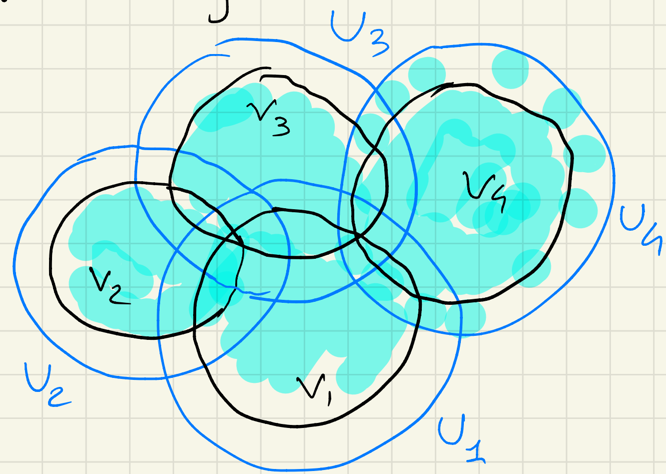
Thm (di immersione di Whitney):

$\forall \varepsilon > 0$, $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ continua, $n \geq 2m \Rightarrow \exists\, F: M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ immersione

con $\| F(p) - f(p) \| < \varepsilon \quad \forall p \in M$

dim:

Atlante adeguato $\left\{ \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n \right\}_{i=1,2,\dots}$



$V_i = \varphi_i^{-1}(B^m) \qquad \underset{\text{cpt}}{M_i} = \bigcup_{j=1}^{i} \overline{V}_i$

$\psi_i : M \to \mathbb{R}^m$ come prima

$\psi_i|_{V_i}$ è carta (embedding)

$\psi_i(p) = 0$ se $p \notin U_i$

Costruiamo per $j = 0, 1, \dots$ $\quad F^0, F^1, \dots, F^j, \dots : M \to \mathbb{R}^n$ t.c.

$F^0 = f$ LISCIA a meno di perturbare

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad \|F^i(p) - f(p)\| < \varepsilon \quad \forall p \in M \\ (2) \quad F^i \equiv F^{i-1} \text{ fuori da } U^i \\ (3) \quad dF^i_p \text{ iniettivo } \forall p \in M_i \end{array}\right\} \quad F^i(p) \to F(p) \quad \text{OK}$$

$F^0 = f$

$$F^i = F^{i-1} + A_i \varphi_i \qquad A \in M(n,m) \qquad \text{cercare } A \text{ giusto}$$

(1) OK se $\|A\|$ piccola

(2) OK

(3) ? Se $\|A\|$ piccola, dF^i_p è iniettivo su M_{i-1} $p \in V_i$

$$dF^i_p = dF^{i-1}_p + A \cdot d(\varphi_i)_p$$

invertibile

$$B = dF^i_p \circ \underbrace{d(\varphi_i)_p^{-1}} = d(F_p^{i-1} \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} + A$$

$$\left(d\varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(p)}$$

Le cose non funzionano se B non ha rango massimo

Non devo prendere

$$A = \underbrace{B - d\left(F_p^{i-1} \circ \varphi_i^{-1}\right)_{\varphi_i(p)}}$$ con $\operatorname{rk} B < m$

$\overset{\shortparallel}{k}$ $\quad$ $k < m$

$$\psi_k : B^m \times M_k(n,m) \longrightarrow M(n,m)$$
$$(x, B) \longmapsto B - d\left(F_p^{i-1} \circ \varphi_i^{-1}\right)_x$$

Se $\exists\, A \in M(n,m) \notin \operatorname{Im} \psi_k \quad \forall\, 0 \le k < m$ $\quad$ OK

$n \geq 2m$ $\qquad$ $m + m \cdot n - (m-k)(n-k) < mn$

$k < m$ $\qquad$ Sard $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} \psi_k$ ha misura nulla $\Rightarrow$ ha parte interna nulla

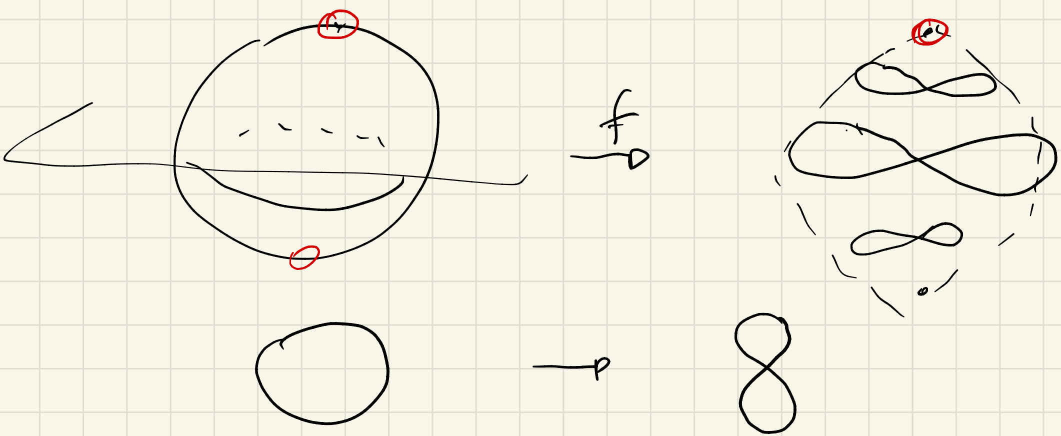
Prendo $A \notin \operatorname{Im} \psi_k \quad \forall\, 0 \le k < m-1$

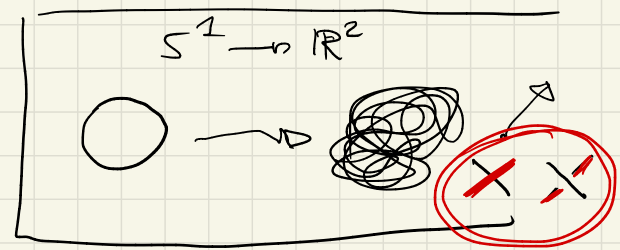
$\|A\| < \varepsilon$ $\qquad \square$

Cor: Ogni M^m si immerge in $\mathbb{R}^{2m}$
(non iniettivamente)

Ogni superficie si immerge in $\mathbb{R}^4$ Klein $\hookrightarrow \mathbb{R}^4$

Ci sono mappe $f: S^2 \to \mathbb{R}^3$ che non si riescono a perturbare a immersioni





Teo (Teorema di immersione iniettiva di Whitney):

$\forall \varepsilon > 0$, $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ immersione $n \geq 2m+1$
$\exists F$: " " " " " iniettiva $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon \ \forall p \in M$

Teo (embedding di Whitney)

Ogni M^m ha embedding $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ proprio

dim:

Ex: Data M, $\exists$ $f: M \to (0, +\infty)$ t.c.

$f^{-1}([0,T])$ cpt $\forall T$ ESAUSTIONE LISCIA

$\quad\quad = M_T$, $T = 0, 1, 2, 3, \dots$

$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \quad \dots$

$g: M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ propria

$p \longmapsto (f(p), 0, \dots, 0)$

Whitney $g \rightsquigarrow G$ imm. iniett. + propria $\Rightarrow$ embedding

Oss: $f(M) \subseteq \mathbb{R}^{2m+1}$ chiuso